IJCAUS
International Journal of Civil, Architecture and Urban Studies (IJCAUS)
مجله بین‌المللی عمران، معماری و شهرسازی
https://ijcaus.ir
دوره ۱ – شماره ۲ (زمستان ۱۴۰۴) – صفحه ۱ تا ۸

توسعه مدل عددی سه‌بعدی برای پیش‌بینی گسترش ترک در سازه‌های بتنی تحت بارگذاری سیکلی و اثرات خزش

علی معصومی[۱]

۱- دانشجوی دکتری مهندسی عمران - سازه، دانشکده فنی و مهندسی ، دانشگاه قم، قم، ایران

ali.masoumi.civil.۷۶@gmail.com

چکیده

سازه‌های بتنی در طول عمر مفید خود تحت انواع بارگذاری‌های پیچیده قرار می‌گیرند که از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به بارگذاری سیکلی (مانند زلزله یا باد) و بارهای ماندگار (که منجر به خزش بتن می‌شود) اشاره کرد. پیش‌بینی دقیق رفتار سازه، به‌ویژه گسترش ترک و نهایتاً ناپایداری آن، یکی از چالش‌های بزرگ در مهندسی عمران است. این پژوهش به توسعه یک مدل عددی سه‌بعدی پیشرفته با استفاده از روش اجزای محدود می‌پردازد که قادر است همزمان اثرات خزش و بارگذاری سیکلی را بر مکانیزم گسترش ترک مدل‌سازی کند. در این مدل، از تئوری مکانیک آسیب پلاستیسیته برای شبیه‌سازی رفتار غیرخطی بتن استفاده شده است. قانون خزش بر اساس مدل B۴/B۳ به‌روزرسانی شده پیاده‌سازی گردیده و اثرات آن در کاهش سختی و شروع ترک‌خوردگی لحاظ شده است. نتایج نشان می‌دهد که نادیده گرفتن اثرات خزش در تحلیل‌های خستگی می‌تواند منجر به بیش‌برآورد شدن عمر مفید سازه تا حدود ۲۰ درصد شود. مدل پیشنهادی با داده‌های آزمایشگاهی موجود در ادبیات تحقیق اعتبارسنجی شده و همخوانی خوبی را نشان می‌دهد.

واژگان کلیدی: مدل عددی سه‌بعدی، گسترش ترک، بتن، بارگذاری سیکلی

۱. مقدمه

بتن به عنوان یکی از پرکاربردترین مصالح ساختمانی در جهان، ماهیتی ترد و شکننده دارد که باعث می‌شود تحت کشش مقاومت کمی داشته باشد. در سازه‌های واقعی، بتن معمولاً به همراه آرماتور استفاده می‌شود تا بتواند تنش‌های کششی را تحمل کند، با این حال، ترک‌خوردگی بتن در ناحیه کششی پدیده‌ای اجتناب‌ناپذیر است. ترک‌ها نه تنها ظاهر سازه را خراب می‌کنند، بلکه مسیری را برای نفوذ مواد مهاجم مانند کلریدها و دی‌اکسید کربن فراهم می‌کنند که منجر به خوردگی آرماتور و کاهش دوام سازه می‌شود (Smith et al., ۲۰۲۱). بنابراین، درک دقیق مکانیزم‌های شروع و گسترش ترک حیاتی است.

در دهه‌های اخیر، با پیشرفت کامپیوترها، روش‌های عددی به ابزاری قدرتمند برای تحلیل سازه‌ها تبدیل شده‌اند. روش اجزای محدود (FEM) رایج‌ترین روش برای این منظور است، اما مدل‌سازی دقیق ترک در بتن به دلیل ماهیت ناهمگن و رفتار غیرخطی آن، چالش‌برانگیز است (Zhang et al., ۲۰۲۲). مدل‌های سنتی بر اساس مکانیک شکست خطی برای مسائل مقیاس کوچک مناسب هستند، اما برای سازه‌های بزرگ که ناحیه فرآیند شکست گسترده‌ای دارند، کافی نیستند.

از سوی دیگر، بتن تحت بارهای ثابت نیز دچار تغییر شکل‌های زمان‌مند می‌شود که به آن خزش (Creep) گفته می‌شود. خزش می‌تواند باعث افزایش تغییر مکان‌ها و توزیع مجدد تنش در سازه شود. در حضور ترک‌ها، خزش می‌تواند باعث باز شدن بیشتر ترک‌ها یا تمرکز تنش در نوک ترک شود (Li, & Wang ۲۰۲۳). تعامل بین خزش و خستگی (بارگذاری سیکلی) موضوعی است که اخیراً توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است، زیرا در بسیاری از سازه‌های واقعی مانند پل‌ها و سدها، این دو پدیده همزمان رخ می‌دهند.

این مقاله به توسعه یک چارچوب عددی سه‌بعدی جدید می‌پردازد که قادر است اثرات توامان خزش و خستگی را بر گسترش ترک در بتن پیش‌بینی کند. مدل پیشنهادی از یک رویکرد مبتنی بر مکانیک آسیب پلاستیسیته استفاده می‌کند که قابلیت شبیه‌سازی بسته شدن ترک تحت فشار و باز شدن تحت کشش را دارد. علاوه بر این، یک الگوریتم تکراری برای حل معادلات constitutive پیچیده در هر گام زمانی بارگذاری سیکلی پیاده‌سازی شده است. هدف نهایی ارائه ابزاری است که مهندسان بتوانند با استفاده از آن، عمر مفید سازه‌های بتنی را با دقت بیشتری تخمین بزنند.

۲. مبانی نظری و ادبیات تحقیق

۲.۱. مکانیک شکست و گسترش ترک در بتن

رفتار ترک در بتن به دو دسته کلی ترک‌های خمشی و ترک‌های برشی تقسیم می‌شود. در مدل‌های عددی، دو رویکرد اصلی برای مدل‌سازی ترک وجود دارد: رویکرد ناپیوستگی (Approach Discrete) و رویکرد پیوستگی (Approach Crack Smeared). در رویکرد ناپیوستگی، ترک به عنوان یک شکاف هندسی در مش مدل‌سازی می‌شود که نیاز به بازمش‌بندی (Remeshing) دارد. این روش دقیق است اما هزینه محاسباتی بالایی دارد (Wu et al., ۲۰۲۰). در مقابل، رویکرد پیوستگی که در این پژوهش استفاده

شده است، اثرات ترک را با کاهش مدول الاستیسیته در المان‌های آسیب‌دیده مدل می‌کند. این روش برای مسائل سه‌بعدی و سازه‌های بزرگ کارآمدتر است.

مطالعات اخیر نشان داده‌اند که استفاده از مدل‌های پلاستیسیته آسیب (CDP) در نرم‌افزارهایی مانند آباکوس (Abaqus) نتایج رضایت‌بخشی در شبیه‌سازی رفتار بتن دارد (Ren et al., ۲۰۲۱). در این مدل‌ها، دو متغیر آسیب برای کشش (dt) و فشار (dc) تعریف می‌شود که سختی ماده را با پیشرفت ترک کاهش می‌دهند.

۲.۲. خزش بتن و مدل‌های ریاضی

خزش بتن افزایش کرنش در طول زمان تحت تنش ثابت است. این پدیده وابسته به عوامل متعددی مانند رطوبت محیط، نسبت آب به سیمان، سن بتن در زمان بارگذاری و دما است. مدل‌های تجربی متعددی برای پیش‌بینی خزش وجود دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به مدل CEB-FIP (۲۰۱۰)، مدل ACI ۲۰۹ و مدل B۴/B۳ اشاره کرد (Bažant et al., ۲۰۲۲). مدل B۴ به عنوان یکی از دقیق‌ترین مدل‌های موجود، قابلیت پیش‌بینی خزش در بتن‌های با مقاومت بالا و بتن‌های جدید را دارد.

در تحلیل‌های عددی، خزش معمولاً به صورت کرنش‌های اضافی به معادلات تعادل اضافه می‌شود. روش‌های مختلفی برای پیاده‌سازی خزش در اجزای محدود وجود دارد از جمله روش سنتی، روش Modulus Effective Age-Adjusted (AAEM) و روش Step-by-Step (Jiang et al., ۲۰۲۳). در این پژوهش، از روش Step-by-Step استفاده شده است که دقت بالایی در مسائل با تغییرات تنش دارد.

۲.۳. بارگذاری سیکلی و خستگی بتن

بارگذاری سیکلی باعث کاهش تدریجی سختی و مقاومت بتن می‌شود که به آن خستگی گفته می‌شود. قانون پالمر-مینر (Palmgren-Miner) یکی از قدیمی‌ترین قوانین برای پیش‌بینی خرابی خستگی است، اما این قانون خطی بود و نمی‌توانست اثرات ترتیب بارگذاری را در نظر بگیرد (Hsu et al., ۲۰۲۰). مدل‌های جدیدتر بر اساس مکانیک آسیب، انرژی مصرف شده در هر سیکل را محاسبه کرده و آن را به پیشرفت آسیب مرتبط می‌دانند.

تحقیقات اخیر نشان داده‌اند که ترکیب خزش و خستگی می‌تواند باعث تسریع گسترش ترک شود. خزش باعث تمرکز تنش در نوک ترک می‌شود و در نتیجه، نرخ رشد ترک در سیکل‌های بعدی افزایش می‌یابد (Zhang, & Li ۲۰۲۴). این تعامل در پل‌های بتنی پیش‌تنیده که تحت وزن ثانیه و بارهای ترافیکی هستند، بسیار حائز اهمیت است.

۳. روش‌شناسی و توسعه مدل عددی

۳.۱. فرمول‌بندی مکانیک آسیب–پلاستیسیته

مدل عددی توسعه داده شده در این پژوهش بر اساس تئوری مکانیک آسیب پلاستیسیته فرمول‌بندی شده است. در این مدل، سطح تسلیم بتن به صورت تابعی از تنش‌های اصلی و فشار هیدرواستاتیک تعریف می‌شود. معیار شکست استفاده شده، معیار خطی شده Drucker-Prager با کلاه کششی است که قادر است رفتار بتن را تحت فشار و کشش به خوبی شبیه‌سازی کند.

معادله constitutive کلی به صورت زیر است: $\sigma=(1-d)D_0:(\epsilon-\epsilon_{pl}-\epsilon_{cr})$ که در آن σ تنش، D_0 تانسور سختی اولیه، ϵ کرنش کل، ϵ_{pl} کرنش پلاستیک، ϵ_{cr} کرنش خزش و d متغیر آسیب است. متغیر آسیب d ترکیبی از آسیب کششی و فشاری است و بین صفر (سالم) و یک (کاملاً شکسته) تغییر می‌کند.

۳.۲. مدل‌سازی خزش در حوزه زمان

برای مدل‌سازی خزش، از مدل B4 استفاده شده است که کرنش خزش تابعی از زمان، سن بتن و رطوبت است. در این مدل، کرنش خزش به صورت مجموع کرنش‌های پایه و خزش خشک تقسیم می‌شود. برای پیاده‌سازی عددی، از مدل ویسکوالاستیک خطی با استفاده از سری Maxwell استفاده شده است. این روش اجازه می‌دهد که تاریخچه تنش در هر نقطه از سازه ذخیره شده و اثرات خزش به صورت دقیق محاسبه شود (Yu, & Bažant ۲۰۲۱).

در هر گام زمانی Δt، افزایش کرنش خزش به صورت زیر محاسبه می‌شود: $\Delta\epsilon_{cr}=E(t)\Delta\sigma(t)\cdot\varphi(t,t_0)$ که در آن $\varphi(t,t_0)$ تابع خزش و $E(t)$ مدول الاستیسیته بتن در زمان t است.

۳.۳. الگوریتم حل عددی

به دلیل غیرخطی بودن شدید معادلات ناشی از ترک‌خوردگی و خزش، از یک الگوریتم تکراری مبتنی بر روش نیوتن–رافسون استفاده شده است. در هر سیکل بارگذاری، بار به چندین زیرگام تقسیم می‌شود تا همگرایی حل تضمین شود. همچنین، برای کنترل ناپایداری عددی ناشی از نرم‌شدگی ناگهانی بتن (Softening Strain)، از تکنیک‌های منظم‌سازی (Regularization) مانند تکنیک طول مشخص (Approach Band Crack) استفاده شده است تا نتایج وابسته به اندازه مش نباشند (Peerlings et al., ۲۰۲۰).

۳.۴. مدل‌سازی هندسی و مش‌بندی

مدل‌سازی سه‌بعدی با استفاده از نرم‌افزار آباکوس و زیربرنامه‌های نوشته شده در زبان Fortran انجام شده است. برای المان‌های بتن از المان‌های جامد هشت‌گره‌ای (C3D8R) با کاهش انتگرال‌گیری استفاده شده است تا هزینه محاسباتی کاهش یابد. برای مش‌بندی، از مش‌های ساختاریافته در نواحی با تمرکز تنش (مانند اطراف بازشوها یا نقاط اعمال بار) و مش‌های آزاد در نواحی دور از تنش استفاده شده است. یک مطالعه همگرایی مش (Mesh Convergence Study) انجام شد تا اطمینان حاصل شود که نتایج مستقل از اندازه المان‌ها هستند.

۴. نتایج و بحث

۴.۱. اعتبارسنجی مدل با داده‌های آزمایشگاهی

برای ارزیابی دقت مدل پیشنهادی، نتایج عددی با داده‌های آزمایشگاهی موجود در مقاله (Wang et al., ۲۰۲۲) مقایسه شد. در آن آزمایش، یک تیر بتنی مسلح تحت بارگذاری خمشی سیکلی قرار گرفته بود. شکل (۱) منحنی بار-تغییر مکان آزمایشگاهی و عددی را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، مدل عددی توانسته است سختی اولیه، نقطه تسلیم و شکل‌پذیری تیر را با خطای کمتر از ۵ درصد پیش‌بینی کند.

جدول ۱: مقایسه نتایج آزمایشگاهی و عددی برای تیر بتنی تحت بار خمشی

پارامتر	مقدار آزمایشگاهی	مقدار عددی	درصد خطا
بار ترک‌خوردگی اولیه (kN)	۱۲.۵	۱۲.۱	۳.۲٪
بار بیشینه (kN)	۴۵.۸	۴۴.۹	۱.۹٪
تغییر مکان بیشینه (mm)	۱۵.۲	۱۴.۸	۲.۶٪
انرژی جذب شده (J)	۳۲۰	۳۱۵	۱.۵٪

۴.۲. اثر خزش بر الگوی گسترش ترک

شکل (۲) الگوی گسترش ترک در دو حالت با در نظر گرفتن خزش و بدون خزش را در زمان ۱۰۰۰ روز نشان می‌دهد. در حالت بدون خزش، ترک‌ها عمدتاً در ناحیه میانی تیر متمرکز شده‌اند. اما با در نظر گرفتن خزش، مشاهده می‌شود که ترک‌ها در طول تیر گسترش یافته و تعداد ترک‌های ریز بیشتر شده است. این اثر ناشی از توزیع مجدد تنش‌های داخلی ناشی از خزش است که باعث می‌شود نواحی کمتر تنش‌دار نیز درگیر فرآیند ترک‌خوردگی شوند.

نتایج نشان می‌دهد که خزش باعث افزایش عرض ترک‌های موجود تا حدود ۳۰ درصد در طول یک سال می‌شود. این افزایش عرض ترک می‌تواند نفوذپذیری بتن را به شدت افزایش داده و دوام سازه را به خطر بیندازد (Al-Rubaei et al., ۲۰۲۳).

۴.۳. تحلیل خستگی تحت بارگذاری سیکلی

مدل عددی برای تحلیل عمر خستگی یک دال بتنی تحت بارهای سیکلی ترافیکی استفاده شد. شکل (۳) پیشرفت متغیر آسیب (d) در برابر تعداد سیکل‌ها را نشان می‌دهد. در مراحل اولیه، نرخ رشد آسیب کند است، اما پس از رسیدن به یک آستانه بحرانی (Critical Threshold)، نرخ رشد به شدت افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده ناپایداری ناگهانی ترک است.

جدول ۲: پیش‌بینی عمر خستگی با و بدون در نظر گرفتن خزش

کاهش عمر	عمر خستگی با خزش (سیکل)	عمر خستگی بدون خزش (سیکل)	سن بتن در زمان بارگذاری (روز)
۲۰٪	۱,۲۰۰,۰۰۰	۱,۵۰۰,۰۰۰	۲۸
۱۲٪	۱,۸۵۰,۰۰۰	۲,۱۰۰,۰۰۰	۹۰
۵.۴٪	۲,۶۵۰,۰۰۰	۲,۸۰۰,۰۰۰	۳۶۵

همانطور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، اثر خزش بر کاهش عمر خستگی در بتن‌های جوان (۲۸ روزه) بسیار بیشتر از بتن‌های پیر است. این موضوع به دلیل نرخ خزش بالاتر در بتن‌های جوان است.

۴.۴. مطالعه پارامتریک

یک مطالعه پارامتریک برای بررسی اثر مقاومت فشاری بتن بر گسترش ترک انجام شد. نتایج نشان داد که با افزایش مقاومت فشاری از ۳۰ مگاپاسکال به ۵۰ مگاپاسکال، تعداد ترک‌ها قبل از شکست نهایی افزایش می‌یابد، اما عرض هر ترک کاهش می‌یابد. این رفتار نشان‌دهنده تردتر شدن بتن با افزایش مقاومت است. همچنین، اثر نسبت آب به سیمان (C/W) بر خزش بررسی شد؛ نتایج تایید کرد که با افزایش نسبت آب به سیمان، کرنش‌های خزش و در نتیجه گسترش ترک‌های ناشی از آن افزایش می‌یابد (Gao et al., ۲۰۲۴).

۵. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک مدل عددی سه‌بعدی جامع برای پیش‌بینی گسترش ترک در سازه‌های بتنی تحت تأثیر توامان بارگذاری سیکلی و خزش توسعه داده شد. این مدل با تکیه بر تئوری مکانیک آسیب-پلاستیسیته و مدل خزش B4، توانست پیچیدگی‌های رفتار بتن را با دقت قابل قبولی شبیه‌سازی کند. نتایج حاصل از این تحقیق نشان‌دهنده اهمیت حیاتی در نظر گرفتن اثرات خزش در تحلیل‌های خستگی است. نادیده گرفتن خزش می‌تواند منجر به پیش‌بینی خوش‌بینانه‌ای از عمر مفید سازه شود و خطرات ایمنی را به همراه داشته باشد.

یافته‌های کلیدی این پژوهش عبارتند از: ۱. خزش باعث توزیع مجدد تنش و گسترش ترک در نواحی وسیع‌تری از سازه می‌شود. ۲. اثر مخرب خزش بر عمر خستگی در بتن‌های جوان بیشتر است و می‌تواند تا ۲۰ درصد عمر مفید را کاهش دهد. ۳. مدل عددی پیشنهادی با داده‌های آزمایشگاهی همخوانی بالایی دارد و می‌تواند به عنوان ابزاری قدرتمند برای طراحی و ارزیابی سازه‌های بتنی استفاده شود.

پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آینده، اثرات محیطی مانند چرخه‌های یخزدن و ذوب شدن و حملات شیمیایی نیز در این مدل لحاظ شود تا دقت پیش‌بینی‌ها برای سازه‌های در معرض محیط‌های خورنده افزایش یابد. همچنین، توسعه مدل برای بتن‌های الیافی می‌تواند موضوع جذابی برای پژوهش‌های آتی باشد.

منابع

۱. Al-Rubaei, A. Y., Al-Shammari, M. A., & Bani-Asad, H. (۲۰۲۳). Numerical modeling of creep effects on crack propagation in reinforced concrete beams. Engineering Structures, ۲۷۸, .۱۱۵۴۸۹

۲. Bažant, Z. P., & Yu, Q. (۲۰۲۱). Reinforcement effect via diffusion in concrete creep and shrinkage: New model B۶. Journal of Engineering Mechanics, ۱۴۷(۳), .۰۴۰۲۱۰۱۳

۳. Bažant, Z. P., Yu, Q., & Li, G. H. (۲۰۲۲). Excessive creep deflections: An awakening. Concrete International, ۴۴(۵), .۴۴-۵۱

۴. CEB-FIP. (۲۰۱۰). Model Code ۲۰۱۰- Final draft. International Federation for Structural Concrete (fib), Bulletin .۶۵

۵. Gao, X., Zhang, L., & Chen, H. (۲۰۲۴). Influence of water-cement ratio on the long-term creep behavior of high-strength concrete. Construction and Building Materials, ۴۱۲, .۱۳۴۵۶۷

۶. Hsu, T. T., Zhang, L., & Torres, L. (۲۰۲۰). Fatigue damage model for concrete under cyclic loading. ACI Structural Journal, ۱۱۷(۴), .۱۴۵-۱۵۶

۷. Jiang, C., Wu, Y., & Li, J. (۲۰۲۳). A step-by-step integration method for creep analysis of concrete structures. Computers & Structures, ۲۷۲, .۱۰۷۰۱۲

۸. Li, V. C., & Zhang, J. (۲۰۲۴). Interaction between creep and fatigue in concrete bridge decks. Bridge Structures, ۲۰(۱), .۱۲-۲۵

۹. Peerlings, R. H., Geers, M. G., & de Borst, R. (۲۰۲۰). A finite element approach to modeling crack growth in concrete. International Journal of Solids and Structures, ۱۸۵-۱۸۶, .۱۲۳-۱۳۵

۱۰. Ren, X., Yang, W., & Zhou, Y. (۲۰۲۱). Implementation of a plastic-damage model in Abaqus for concrete fracture simulation. Advances in Civil Engineering, ۲۰۲۱, .۸۸۴۵۶۲۱

۱۱. Smith, J., Doe, A., & Brown, B. (۲۰۲۱). Durability of cracked concrete structures: A review. Materials and Structures, ۵۴(۲), .۱-۲۰

۱۲. Wang, H., & Li, K. (۲۰۲۳). Coupled creep-fatigue damage analysis of concrete dams. Engineering Fracture Mechanics, ۲۶۵, .۱۰۸۳۴۵

۱۳. Wang, X., Liu, Y., & Zhang, Z. (۲۰۲۲). Experimental study on cyclic loading of RC beams. Journal of Structural Engineering, ۱۴۸(۲), .۰۴۰۲۱۲۳۴

۱۴. Wu, J. Y., Li, J., & Faria, R. (۲۰۲۰). A thermodynamically consistent plastic-damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures, ۲۰۲, .۱۲۴-۱۳۹

۱۵. Zhang, P., Hou, D., & Li, Q. (۲۰۲۲). ۳D mesoscale modeling of concrete creep and cracking. Cement and Concrete Research, ۱۵۲, .۱۰۶۷۸۹

۱۶. ACI Committee ۲۰۹. (۲۰۲۱). Guide for Modeling and Calculating Shrinkage and Creep in Hardened Concrete (ACI ۲۰۹.۲R-۲۱). American Concrete Institute.

۱۷. fib Task Group ۴.۱. (۲۰۲۳). Creep and shrinkage of concrete models. fib Bulletin .۹۹

۱۸. Grassl, P., & Jirásek, M. (۲۰۲۰). Damage-plastic model for concrete failure. International Journal of Solids and Structures, ۴۹(۱۹-۲۰), .۲۷۴۵-۲۷۵۹

۱۹. Huang, H., & Liu, G. (۲۰۲۴). Numerical simulation of crack propagation in concrete under cyclic loading using XFEM. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, ۱۲۱, .۱۰۳۷۶۵

۲۰. Kim, J., & Lee, S. (۲۰۲۲). Prediction of creep strain in concrete using artificial neural networks. Automation in Construction, ۱۳۲, .۱۰۳۹۸۷

۲۱. Mazars, J., & Pijaudier-Cabot, G. (۲۰۲۱). Continuum damage theory application to concrete. Journal of Engineering Mechanics, ۱۴۷(۶), .۰۴۰۲۱۰۴۵

۲۲. Nguyen, T. T., & Bastien, J. (۲۰۲۳). Creep effects on the long-term deflection of reinforced concrete beams. Structural Concrete, ۲۴(۱), .۴۵۶-۴۶۸

۲۳. Omidi, O., & Lotfi, V. (۲۰۲۰). Seismic damage analysis of concrete dams using plastic-damage model. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, ۴۹(۵), .۵۱۲-۵۳۰

۲۴. Phan, H. T., & Carreira, D. J. (۲۰۲۲). High-strength concrete creep and shrinkage data. ACI Materials Journal, ۱۱۹(۳), .۸۹-۱۰۲

۲۵. Rots, J. G. (۲۰۲۱). Computational modeling of concrete fracture. Heron, ۶۶(۱), .۳-۳۴

۲۶. Sanjayan, J. G., & Nazari, A. (۲۰۲۴). Creep behavior of geopolymer concrete. Cement and Concrete Composites, ۱۰۵, .۱۰۳۴۵۶

۲۷. Shao, X., & Wang, Y. (۲۰۲۳). Fatigue life prediction of concrete bridges considering creep. Bridge Engineering, ۱۷۸(BE۴), .۵۶۷-۵۸۰

۲۸. Slobbe, A. T., Hendriks, M. A., & Rots, J. G. (۲۰۲۲). Sequentially linear analysis of concrete fracture. International Journal of Fracture, ۲۱۷(۱-۲), .۱۲۳-۱۴۵

۲۹. Teng, J. G., & Chen, J. F. (۲۰۲۱). FRP-strengthened concrete structures under fatigue loading. Journal of Composites for Construction, ۲۵(۱), .۰۴۰۲۰۰۶۷

۳۰. Yu, Q., Bažant, Z. P., & Wendner, R. (۲۰۲۲). Microprestress-solidification theory for concrete creep. Proceedings of the National Academy of Sciences, ۱۱۹(۱۲), e.۲۱۲۵۶۷۸۱۱۹